

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Начальник  
учебно-методического отдела  
Т.Ф. Артеменко**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Топология II
<b>по направлению:</b>	Математика
<b>профиль подготовки:</b>	Фундаментальная математика Высшая школа современной математики Высшая школа современной математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 90 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 96 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 216, всего зач. ед.: 6

Программу составили:

А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

М.А. Цфасман, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании Высшая школа современной математики 02.09.2024

## Аннотация

Большинство разделов современной математики используют основные понятия топологии, прогресс которой в XX и XXI веке сделал ее одной из основных математических дисциплин. Цель курса – продолжить знакомить студентов с базовыми понятиями и основными результатами топологии. Основное внимание уделяется теориям гомологий и когомологий топологических пространств. В качестве базы даются соответствующие алгебраические понятия. Разбираются функторы  $\text{Tor}$  и  $\text{Ext}$ , связь с гладкими многообразиями. Курс доводится до когомологического умножения и когомологий с компактными носителями. Теория произведений, теория препятствий, векторные расслоения, характеристические классы изучаются в последующих более продвинутых курсах топологии.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

Формирование знаний по основам топологической теории гомологий и когомологий для дальнейшего использования в других математических дисциплинах; формирование математической культуры, исследовательских навыков и способности применять знания на практике.

#### Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области топологической теории гомологий и когомологий;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в соотнесении результатов гомологической топологии с контекстом математических дисциплин

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов

ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Основные понятия теории гомологий и когомологий топологических пространств.

уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельной работы с гомологиями и когомологиями.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Симплициальные гомологии.	2	4		8
2	Сингулярные гомологии.	2	4		8
3	Точные последовательности гомологий.	6	12		12
4	Клеточный цепной комплекс и его гомологии. Явный вид граничного гомоморфизма	4	8		12
5	Эйлерова характеристика.	2	4		8
6	Гомологии с коэффициентами.	2	4		8
7	Функторы Tor и Ext.	2	4		8
8	Произведение Колмогорова-Александера. Относительные произведения и X-произведение	4	8		12
9	Топологические и гладкие многообразия.	2	4		8
10	Когомологии с компактными носителями. Изоморфизмы двойственности, относительные версии	4	8		12
Итого часов		30	60		96
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		216 час., 6 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

1. Симплициальные гомологии.

Симплициальные комплексы и триангуляции.  
Симплициальные гомологии.

2. Сингулярные гомологии.

Сингулярные гомологии.  
Функториальность и гомотопическая инвариантность.

3. Точные последовательности гомологий.

Длинная точная последовательность гомологий.  
Относительные группы гомологий и точная последовательность пары  
Теорема вырезания и ее следствия. Точная последовательность Майера-Вьеториса.

4. Клеточный цепной комплекс и его гомологии. Явный вид граничного гомоморфизма

Эквивалентность симплициальных и сингулярных гомологий.  
Клеточный цепной комплекс и его гомологии.  
Явный вид граничного гомоморфизма.

5. Эйлерова характеристика.

Эйлерова характеристика.  
Примеры вычислений.

6. Гомологии с коэффициентами.

Гомологии с коэффициентами.  
Коэффициентные точные последовательности.

7. Функторы  $\text{Tor}$  и  $\text{Ext}$ .

Функторы  $\text{Tor}$  и  $\text{Ext}$ .  
Формулы универсальных коэффициентов.

8. Произведение Колмогорова-Александера. Относительные произведения и  $X$ -произведение

Произведение Колмогорова-Александера.  
Относительные произведения и  $X$ -произведение.  
Клеточное определение умножения.  
Формула Кюннета.  
Примеры вычисления колец когомологий.

9. Топологические и гладкие многообразия.

Топологические и гладкие многообразия.  
Группы локальных гомологий.  
Ориентация.  
Фундаментальный класс.

10. Когомологии с компактными носителями. Изоморфизмы двойственности, относительные версии

Когомологии с компактными носителями.  
Изоморфизмы двойственности, относительные версии.  
Связь с когомологическим умножением.  
Сигнатура многообразия.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

### Основная литература

1. Современная геометрия : Методы и приложения [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко .— 5-е изд., испр. — М. : Эдиториал УРСС : Добросвет, 2001 .— Т. 1 : Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей. - 2001. - 336 с.

### Дополнительная литература

1. Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, Электронная версия печатной публикации / А. Б. Скопенков. — Москва, МЦНМО, 2016
2. Элементарная топология / О. Я. Виро, О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, В. М. Харламов, Москва, МЦНМО, 2018

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<https://old.mccme.ru/iium/courses.php>  
<https://library.mccme.ru/>

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных и практических (семинарских) занятиях могут использоваться мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций, а также технологии дистанционной аудиовидеоконференцсвязи.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Методические указания приводятся в разрабатываемых аудиторных и домашних раздаточных материалах (листочках).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

<b>по направлению:</b>	Математика
<b>профиль подготовки:</b>	Фундаментальная математика Высшая школа современной математики Высшая школа современной математики
<b>курс:</b>	<u>2</u>
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

#### Разработчики:

А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

М.А. Цфасман, д-р физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Топология II» обучающийся должен:

### знать:

Основные понятия теории гомологий и когомологий топологических пространств.

### уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

### владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельной работы с гомологиями и когомологиями.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по материалу предыдущего занятия.

#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Симплициальные комплексы и триангуляции. Симплициальные гомологии
2. Сингулярные гомологии. Функториальность и гомотопическая инвариантность
3. Длинная точная последовательность гомологий
4. Относительные группы гомологий и точная последовательность пары
5. Теорема вырезания и ее следствия. Точная последовательность Майера-Вьеториса
6. Эквивалентность симплициальных и сингулярных гомологий
7. Клеточный цепной комплекс и его гомологии. Явный вид граничного гомоморфизма
8. Эйлерова характеристика
9. Гомологии с коэффициентами. Коэффициентные точные последовательности
10. Функторы  $\text{Tor}$  и  $\text{Ext}$ . Формулы универсальных коэффициентов
11. Произведение Колмогорова-Александера. Относительные произведения и  $X$ -произведение
12. Клеточное определение умножения. Формула Кюннета. Примеры вычисления колец когомологий
13. Топологические и гладкие многообразия. Группы локальных гомологий. Ориентация. Фундаментальный класс
14. Когомологии с компактными носителями. Изоморфизмы двойственности, относительные версии
15. Связь с когомологическим умножением. Сигнатура многообразия

Пример экзаменационного билета:

- 1) Клеточный цепной комплекс и его гомологии.
- 2) Сигнатура многообразия

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;



- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Зачет проводится по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, предусмотренных программой дисциплины.

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 40 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не может продолжаться более двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена и зачета обучающимся запрещается пользоваться помощью других лиц и мобильными телефонами, разрешается пользоваться программой учебной дисциплины и справочной литературой по выбору экзаменатора.